第 2 章　三角恒等变换

2.1　两角和与差的三角函数

2.1.1　两角和与差的余弦公式+
2.1.2　两角和与差的正弦公式+
2.1.3　两角和与差的正切公式

1. A 【解析】$\cos 72°\cos 27°+\sin 72°\cdot\sin 27°=\cos(72°-27°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选 A.

2. A 【解析】$\because A$ 是锐角，$\therefore \frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，即 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)>0$.

又$\because \cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{13}$，

$\therefore \sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(A+\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$，

$\sin\left(\frac{\pi}{6}-A\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-A\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{3}+A\right)=\cos\left[\frac{\pi}{6}+\left(\frac{\pi}{6}+A\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{5}{13}-\frac{1}{2}\times\frac{12}{13}=\frac{5\sqrt{3}-12}{26}$.

故选 A.

3. B 【解析】$\because \tan 95°=k$，$\therefore \tan 35°=\tan(95°-60°)=\frac{k-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}$.

4. $\frac{63+32\sqrt{6}}{325}$ 【解析】$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\alpha+\beta<\pi$，

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{63}{65}$，

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，

$\therefore \sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\frac{63}{65}\times\frac{1}{5}-\left(-\frac{16}{65}\right)\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{63+32\sqrt{6}}{325}$.

5. B 【解析】$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=$

$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=2$,

$\because\ \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$,

$\therefore\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

$\because\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. 故选 B.

6. B 【解析】$c=2a\cos B$,由正弦定理得 $\sin C=2\sin A\cos B$,

因为 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin A\cos B$,

所以 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$,即 $\sin(A-B)=0$,

因为 $A,B\in(0,\pi)$,所以 $A-B\in(-\pi,\pi)$,

故 $A=B$,所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

故选 B.

7. D 【解析】由 $\tan\alpha=\dfrac{3}{\tan\dfrac{\pi}{7}}$,

得 $\tan\alpha\cdot\tan\dfrac{\pi}{7}=3$,

故 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{14}\right)}{\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{7}\right)}=\dfrac{\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{14}\right)\right]}{\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{7}\right)}$

$=\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{7}\right)}$

$=\dfrac{\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{7}+\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{7}}{\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{7}-\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{7}}$

$=\dfrac{1+\tan\alpha\tan\dfrac{\pi}{7}}{1-\tan\alpha\tan\dfrac{\pi}{7}}=\dfrac{1+3}{1-3}=-2$. 故选 D.

8.【解】(1)$\because\ \dfrac{6\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2\cos(\pi-\alpha)-3\sin(\pi+\alpha)}=-8$, $\therefore\ \dfrac{6\sin\alpha+\cos\alpha}{-2\cos\alpha+3\sin\alpha}=\dfrac{6\tan\alpha+1}{-2+3\tan\alpha}=-8$,解得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$.

(2)$\because \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\therefore \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} + \beta < \dfrac{3\pi}{4}$.

又 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \cos\beta = \cos\left[\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right) - \dfrac{\pi}{4}\right] = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, $\therefore \sin\beta = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$,

$\tan\beta = \dfrac{1}{3}$, $\therefore \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}} = 1$,

又$\because \alpha+\beta \in \left(0, \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\therefore \alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$.

9. ABC 【解析】$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,故 A 式不恒成立;

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,故 B 式不恒成立;

$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$,故 C 式不恒成立;

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta) \cdot (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - (1-\sin^2\alpha) \cdot \sin^2\beta = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$,故 D 式恒成立.

故选 ABC.

2.2 二倍角的三角函数

1. C 【解析】由 $3\cos 2\alpha + 8\sin\alpha + 5 = 0$ 知 $3\sin^2\alpha - 4\sin\alpha - 4 = 0$,

解得 $\sin\alpha = -\dfrac{2}{3}$ 或 $\sin\alpha = 2$(舍),

又 $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin\alpha = -\dfrac{2}{3} < 0$,

$\therefore \alpha$ 为第四象限角, $\therefore \cos\alpha > 0$,

由 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,得 $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$,

则 $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

2. A 【解析】$\cos^4 75° - \sin^4 75°$

$= (\cos^2 75° - \sin^2 75°)(\cos^2 75° + \sin^2 75°)$

$= \cos^2 75° - \sin^2 75° = \cos 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.

3. A 【解析】因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}(0<\alpha<\pi)$，所以 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$，

所以 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$，

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$，$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$，

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

即 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{2}$，

所以 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=-\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

故选 A.

4. B 【解析】$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{1}{4}$，

所以 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-1=\frac{1}{8}-1=-\frac{7}{8}$，故选 B.

5. A 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$f(x)=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin 2x$，

$\because f(-x)=-\sin 2(-x)=\sin 2x=-f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是奇函数，且最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

故选 A.

6. A 【解析】$\because \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=-\frac{3}{5}$，

$\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{\tan\theta+1}=2$，

$\therefore \frac{\sin\theta\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\left(-\frac{3}{5}\right)\times 2=-\frac{6}{5}$. 故选 A.

7. 【解】(1) 根据三角函数的定义，因为角 α 终边上有一点 $(1,2)$，

所以 $r=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

即$\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$，所以 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{3}{5}$.

(2) 由 $\alpha\in(0,\pi)$ 且 $\tan\alpha=2>1$，得 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $2\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

由(1)知 $\cos 2\alpha=-\frac{3}{5}$，

所以 $\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$.

又因为$\beta\in(0,\pi)$，$\cos\beta=-\frac{7\sqrt{2}}{10}<0$，所以$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以 $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

且 $2\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

因为 $\sin(2\alpha-\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta-\cos 2\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{10}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $2\alpha-\beta=-\frac{\pi}{4}$.

8. D 【解析】原式 $=\sqrt{4\cos^2 4}+2\sqrt{(\sin 4-\cos 4)^2}=|2\cos 4|+2|\sin 4-\cos 4|$. $\because \frac{5\pi}{4}<4<\frac{3\pi}{2}$，

$\therefore$ 原式 $=-2\sin 4$.

故选 D.

9. B 【解析】因为 $\frac{\sqrt{2}\cos 2\theta}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{3}\cdot\sin 2\theta$，所以 $\frac{\sqrt{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta}=2\sqrt{3}\cdot\sin\theta\cos\theta$，

所以 $\frac{\sqrt{2}(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-\sin\theta)}=2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$，所以 $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$，

两边同时平方，得 $\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=3(\sin\theta\cos\theta)^2$，

所以 $3(\sin\theta\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta-1=0$，所以 $(\sin\theta\cos\theta-1)(3\sin\theta\cos\theta+$

$1)=0$,

解得 $\sin\theta\cos\theta=1$ 或 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$.

又因为 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$, 则 $\theta+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, 即 $\theta\neq\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

所以 $\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,

所以 $-\frac{\sqrt{6}}{3}<\sin\theta\cos\theta<\frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以 $\sin\theta\cos\theta\neq 1$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$. 故选 B.

10. 0 或 $\frac{\pi}{4}$　【解析】$\because \cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{\sin 2\theta}{2}+\frac{\cos 2\theta+1}{2}=1$,

$\therefore \sin 2\theta+\cos 2\theta=1$,

$\therefore \sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because \theta\in[0,\pi)$, $\therefore 2\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right)$,

$\therefore 2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 或 $2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$,

$\therefore \theta=0$ 或 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

11. ABD　【解析】设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 因为 $\cos\frac{C}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=\frac{3}{5}$, 所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{4}{5}$, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times1\times5\times\frac{4}{5}=2$, 故 A, B 正确;

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, 即 $c^2=1^2+5^2-2\times1\times5\times\frac{3}{5}=20$, 所以 $c=2\sqrt{5}$, 所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径 $2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$, 故 C 错误;

设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r, 则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(a+b+c)r$, 即 $\frac{1}{2}(1+5+2\sqrt{5})r=2$, 所以 $r=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, 故 D 正确.

故选 ABD.

2.3 简单的三角恒等变换

1. A 【解析】由 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, 得 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$.

$\because\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\therefore\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$,

$\cos\frac{\alpha}{2}>0$,

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\therefore\cos\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)=-\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

故选 A.

2. B 【解析】因为 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$, 所以 $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2-\cos\alpha}$,

又因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\frac{\alpha}{2}\neq0$,

所以 $2-\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$,

即 $2-\cos\alpha=1+\cos\alpha$,

所以 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

又因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, 所以 $\tan\alpha=\sqrt{3}$. 故选 B.

3. C 【解析】$\because\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta=0$, $\therefore\sin\alpha=0$.

方法一:原式 $=\sin\alpha\cos2\beta+\cos\alpha\cdot\sin2\beta+\sin\alpha\cdot\cos2\beta-\cos\alpha\sin2\beta=2\sin\alpha\cos2\beta=0$.

方法二:$\sin(\alpha+2\beta)+\sin(\alpha-2\beta)=2\sin\frac{\alpha+2\beta+\alpha-2\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+2\beta-\alpha+2\beta}{2}=2\sin\alpha\cos2\beta=0$, 故选 C.

4. 2 【解析】原式 $=\frac{3-\cos20^\circ}{2-\frac{1+\cos20^\circ}{2}}=2$.

5. $\frac{1}{2}$ 【解析】原式 $=\cos 40°+\cos 80°+\cos 60°-\cos 20°=\cos(60°-20°)+\cos(60°+20°)+\cos 60°-\cos 20°=2\cos 60°\cdot\cos(-20°)+\cos 60°-\cos 20°=\cos 60°=\frac{1}{2}$.

6.【解】(1)因为 $\cos\beta=\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}$ 且 $\cos\beta=-\frac{1}{3}$,所以 $\frac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}=-\frac{1}{3}$,

解得 $\tan^2\frac{\beta}{2}=2$.

因为 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\tan\frac{\beta}{2}>0$, $\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}$.

(2)因为 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\cos\beta=-\frac{1}{3}$,

所以 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

因为 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{7}{9}$,所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

所以 $\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=\frac{1}{3}$.

7. A 【解析】因为 $a=\cos^2 12°-\sin^2 12°=\cos 24°$,

$b=\frac{2\tan 12°}{1-\tan^2 12°}=\tan 24°<\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°<\cos 24°=a$,

$c=\sqrt{\frac{1-\cos 48°}{2}}=\sin 24°<\frac{\sin 24°}{\cos 24°}=\tan 24°=b$,所以 $c<b<a$.

8. D 【解析】$\because\alpha,\beta\in(0,\pi)$,

$\therefore \sin\alpha+\sin\beta>0$.

又 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\beta-\cos\alpha)$,

$\therefore \cos\beta-\cos\alpha>0$,即 $\cos\beta>\cos\alpha$.

又 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减,

$\therefore \beta<\alpha$, $\therefore 0<\alpha-\beta<\pi$.

由原式可知 $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

$\therefore \tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\sqrt{3}$, $\therefore \frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\pi}{3}$,

$\therefore \alpha-\beta=\frac{2\pi}{3}$.

9. AB 【解析】$f(x)=\frac{3}{2}\sin 2x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos 2x=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. 对于 A 选项,令 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$,所以函数图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 对称,A 选项正确;对于 B 选项,令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$,即函数的图象 C 的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, B 选项正确;对于 C 选项, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,则 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,所以当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时,取最大值,最大值为 $3\sin\frac{\pi}{2}=3$, C 选项错误;对于 D 选项,令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,解得 $\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,所以函数的单调递减区间为 $\left[\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{11\pi}{12}+k\pi\right]$, $k\in\mathbf{Z}$,又当 $k=-1$ 时,单调递减区间为 $\left[-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{12}\right]$,当 $k=0$ 时,单调递减区间为 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$,所以函数

在$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$上不单调递减，D 选项错误. 故选 AB.

10.【解】(1) 选条件①：因为 $\sin A\cdot\cos A\tan A=\frac{3}{4}$，所以 $\sin A\cos A\cdot\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{3}{4}$，即 $\sin^2A=\frac{3}{4}$，又因为△ABC 为锐角三角形，所以 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

选条件②：因为$\frac{\sqrt{3}\sin A-\cos A}{\sqrt{3}\sin A+\cos A}=\frac{1}{2}$，

所以 $2(\sqrt{3}\sin A-\cos A)=\sqrt{3}\sin A+\cos A$，

所以$\sqrt{3}\sin A=3\cos A$，又因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos A\neq 0$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

选条件③：由正弦定理可得 $2\sin A\cdot\cos A-\sin B\cos C=\sin C\cos B$，

即 $2\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cdot\cos B=\sin(B+C)=\sin A$，又因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) $a+b+c=2+\frac{a}{\sin A}(\sin B+\sin C)=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]+2=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)+2=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)+2=4\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+2$.

因为 $C=\frac{2\pi}{3}-B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，$B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，

则 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

即 $a+b+c\in(2+2\sqrt{3},6]$，

即 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(2+2\sqrt{3},6]$.